

【気体分子の衝突によるエネルギー差の変化・ベクトルの演習】

組	番
---	---

目的

一種類の元素からなる気体を考える。気体分子（又は原子）が弾性衝突し粒子1と粒子2が速度 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ で衝突し、速度 $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$ になったとすると、運動量保存則とエネルギー保存則から次式が成り立つ。これらの法則によって、気体分子同士の衝突による速度変化にどのような制約が出るのか調べてみる。

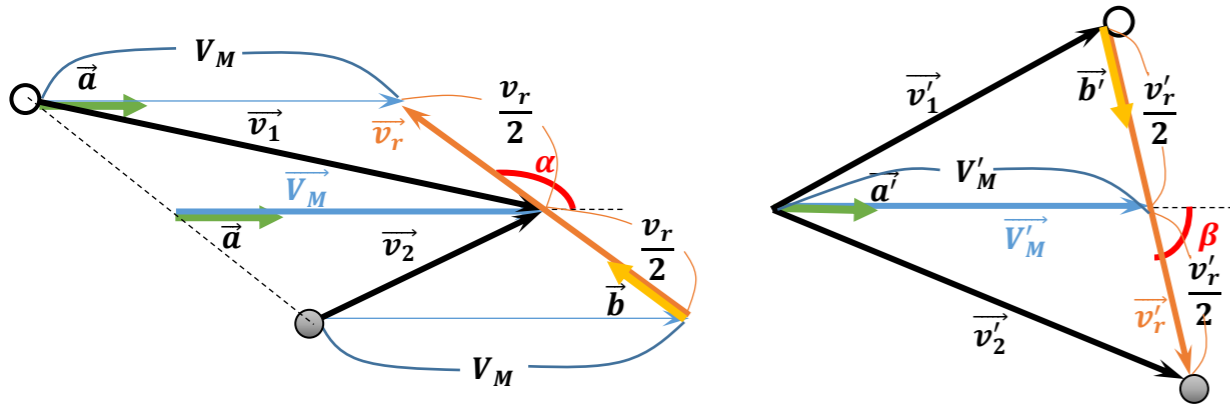
考察

$$\begin{aligned} \text{運動量保存則} \quad & m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{v}'_1 + m\vec{v}'_2 \\ \text{エネルギー保存則} \quad & \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \end{aligned}$$

一種類の元素なので質量  $m$  は全て同じだから次のような簡単な関係に書ける。

$$\begin{aligned} \text{運動量保存則} \quad & \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \\ \text{エネルギー保存則} \quad & v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \end{aligned}$$

さらに簡単な関係にするため、粒子1,2のそれぞれの速度 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ではなく、重心速度 $\vec{V}_M$ 、相対速度 $\vec{v}_r$ で考える。



$$\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} = \vec{V}_M = V_M \vec{a} \quad V_M: \text{衝突前の重心の速さ} \quad \vec{a}: \text{重心速度の向き}$$

ただし  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1$

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_r = v_r \vec{b} \quad v_r: \text{衝突前の相対的な速さ} \quad \vec{b}: \text{相対速度の向き}$$

ただし  $\vec{b} \cdot \vec{b} = 1$

$$\frac{\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2}{2} = \vec{V}'_M = V'_M \vec{a}' \quad V'_M: \text{衝突後の重心の速さ} \quad \vec{a}': \text{重心速度の向き}$$

ただし  $\vec{a}' \cdot \vec{a}' = 1$

$$\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = \vec{v}'_r = v'_r \vec{b}' \quad v'_r: \text{衝突後の相対的な速さ} \quad \vec{b}': \text{相対速度の向き}$$

ただし  $\vec{b}' \cdot \vec{b}' = 1$

重心速度 $\vec{V}_M$ と相対速度 $\vec{v}_r$ を使って粒子1,2の速度 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ を書き直すと次のように書ける。

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= V_M \vec{a} - \frac{1}{2} v_r \vec{b} \\ \vec{v}_2 &= V_M \vec{a} + \frac{1}{2} v_r \vec{b} \\ \vec{v}'_1 &= V'_M \vec{a}' - \frac{1}{2} v'_r \vec{b}' \\ \vec{v}'_2 &= V'_M \vec{a}' + \frac{1}{2} v'_r \vec{b}' \end{aligned}$$

【課題1】:上の4つの式を、図の下の相対速度と重心速度の定義の式から導きなさい。

これを運動量保存則とエネルギー保存則に代入すると重心速度と相対速度に関する関係式になる。

$$\text{運動量保存則} \quad V_M \vec{a} = V'_M \vec{a}'$$

ここから **重心の速さは変化しない**  $V_M = V'_M$  **重心速度の向きは変化しない**  $\vec{a} = \vec{a}'$   
 エネルギー保存則を使うために2乗をベクトルの内積で計算する。 $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1, \vec{b} \cdot \vec{b} = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(\alpha)$ として

$$\begin{aligned} v_1^2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 &= \left( V_M \vec{a} - \frac{1}{2} v_r \vec{b} \right) \cdot \left( V_M \vec{a} - \frac{1}{2} v_r \vec{b} \right) \\ &= V_M^2 \vec{a} \cdot \vec{a} - V_M v_r \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4} v_r^2 \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= V_M^2 - V_M v_r \cos \alpha + \frac{1}{4} v_r^2 \end{aligned}$$

【課題2】: $v_2^2, v_1'^2, v_2'^2$ も同様に計算しなさい。

$$\text{これらを使うと} \quad \text{エネルギー保存則} \quad 2V_M^2 + \frac{1}{2}v_r^2 = 2V_M'^2 + \frac{1}{2}v_r'^2$$

運動量保存則から $V_M = V'_M$ なので、ここから **相対的な速さは変化しない**  $v_r = v'_r$

考察のまとめ

気体分子の衝突では次のようになる。

1. 重心の速さ $V_M$ は変化しない
2. 重心の速度の向き $\vec{a}$ は変化しない
3. 相対的な速さ $v_r$ は変化しない
4. 重心速度に対する相対速度の角度 $\alpha, \beta$ には何の制約もない

目的(再び)

気体分子はこうした衝突によって、その速さはどのように変わっていくのだろうか。最終的に皆同じ平均の速さにそろっていくのか、それとも逆にバラバラになっていくのか、それともはじめに与えられた状況のまま変化しないのか。

もし、最終的に同じ速さに近づいたら、二つの粒子の運動エネルギーの差が小さくなっていくことになるので、まず、二つの粒子の運動エネルギーの差 $\Delta E$ を重心速度と相対速度で表すと次のようになる。

$$\Delta E = \left| \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \right| = mV_M v_r |\cos \alpha|$$

【課題3】:【課題2】の結果を使って上式を導きなさい。

結論

衝突前後でエネルギー差の変化は次のように、 $V_M v_r$ は変化しないので重心速度と相対速度のなす角度の変化で変化する。

$$\Delta E' - \Delta E = mV_M v_r (|\cos \beta| - |\cos \alpha|)$$

例えば静止していた粒子2に粒子1を衝突させる場合は $\alpha = 180^\circ$ なので $|\cos \alpha| = 1$ となり、 $|\cos \beta| \leq 1$ だからエネルギー差は直線的な衝突 $\beta = 0^\circ$ 以外は減少する。(重心系だと $V_M = 0$ でエネルギー差 $\Delta E$ は0で変化しないので、それは例外的な場合である。)例えばエネルギー差が広がるのは、 $\alpha = 90^\circ$ のような $|\cos \alpha| = 0$ でほぼ同じ速さで斜め衝突して、 $\beta = 0^\circ$ のように $|\cos \beta| = 1$ で違う速さで直線的に離れる場合である。

残された課題

今回の考察で1.衝突で2体間の相対的または合成的な量は変化しないこと。2.衝突の角度によって粒子のエネルギー差は広がりも縮まりもすること。がわかった。残された課題は、衝突の角度には何か偏りがあるのか無いのか。球状の原子がランダムな方向から衝突する場合について考えてみよう。

【課題4】:もし衝突角度がランダムだとしたら、気体同士の衝突によって、気体分子のエネルギー差はどうなっていくか。

(課題1~4は全て別紙に手計算して提出)